

AMPLIFICATEUR OPERATIONNEL : REALISATION DE FILTRES DU DEUXIEME ORDRE ¹

On trouvera en annexe des liens vers les « applets » de J.J. Rousseau qui illustreront par la simulation quelques filtres présentés ici ainsi que la présentation d'un filtre réjecteur de fréquences.

L'amplificateur opérationnel est considéré comme idéal. On supposera de plus que la courbe de réponse de l'amplificateur est idéale : gain en tension constant quelle que soit la fréquence.

1 INTRODUCTION : LES FONCTIONS DE TRANSFERT DES FILTRES DU 2° ORDRE : PASSE-BAS, PASSE-HAUT ET PASSE-BANDE

Nous allons établir les fonctions de transfert types des différents filtres actifs à savoir : passe-bas, passe-haut et passe-bande. Pour définir ces fonctions de transfert, on va utiliser comme référence le circuit passif RLC série parfait (la self-inductance L est idéale) excité par une tension sinusoïdale e_g constante de pulsation ω (figure 1).

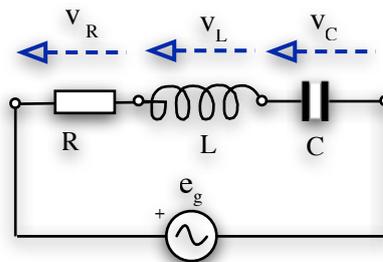


Figure 1

On rappelle les propriétés essentielles du circuit RLC série :

- Impédance $\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$
- Pulsation de résonance ω_0 telle que : $LC\omega_0^2 = 1$
- Coefficient de qualité $Q_s = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$
- Bande passante : $\Delta\omega = \frac{\omega_c}{Q_s}$

On se propose d'exprimer l'impédance du circuit en fonction du coefficient de qualité Q_s en introduisant dans l'équation la pulsation de résonance ω_0 .

¹ Philippe ROUX © 2012

<http://philippe.roux.7.perso.neuf.fr/>

$$\underline{Z} = R + j \left[\omega L \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right) - \frac{1}{\omega C} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

Sachant que : $Q_s R = L \omega_0 = \frac{1}{C \omega_0}$, il vient alors : $\underline{Z} = R \left[1 + j Q_s \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$

Pour généraliser à tous les circuits, on introduit la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. L'impédance du

circuit est alors : $\underline{Z} = R \left[1 + j Q_s \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]$

1.1 Expression de la tension v_C aux bornes du condensateur : filtre passe-bas.

La tension de sortie est prélevée aux bornes du condensateur du circuit RLC série. On détermine alors la fonction de transfert :

$$\underline{T}_1(\omega) = \frac{v_C}{e_s} = \frac{1}{j\omega CR \left[1 + j Q_s \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]} \quad \underline{T}_1(\omega) = \frac{\omega_0}{j\omega \omega_0 CR \left[1 + j Q_s \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]}$$

$$\underline{T}_1(\omega) = \frac{Q_s}{jx \left[1 + j Q_s \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]} \quad \text{soit en développant : } \underline{T}_1(\omega) = \frac{1}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q_s}}$$

Le coefficient de qualité Q_s n'est pas utilisé pour caractériser les filtres actifs du deuxième ordre. On lui préfère le coefficient d'amortissement du circuit tel que : $m = \frac{1}{2Q_s}$.

De même, ces filtres font intervenir leur fréquence de coupure ω_c à -3 dB. Aussi la fréquence réduite devient : $x = \frac{\omega}{\omega_c}$

On obtient alors la fonction de transfert type du filtre passe-bas du deuxième ordre :

$$\underline{T}_1(\omega) = \frac{1}{1 + 2jmx + (jx)^2} \quad (1)$$

On donne en figure 2 le graphe du module de $T_1(\omega)$ en fonction de x pour trois valeurs du coefficient d'amortissement m : 0,1, 0,5 et 0,707. La figure 3 indique l'évolution correspondante de l'argument de $T_1(\omega)$.

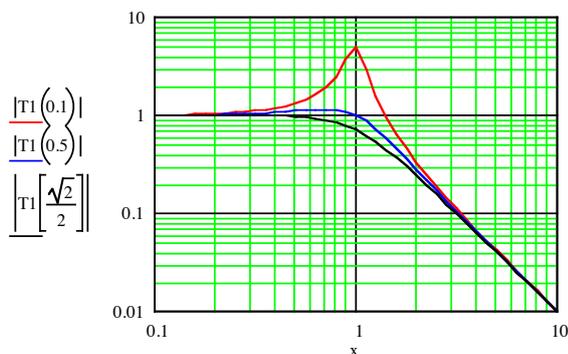


Figure 2

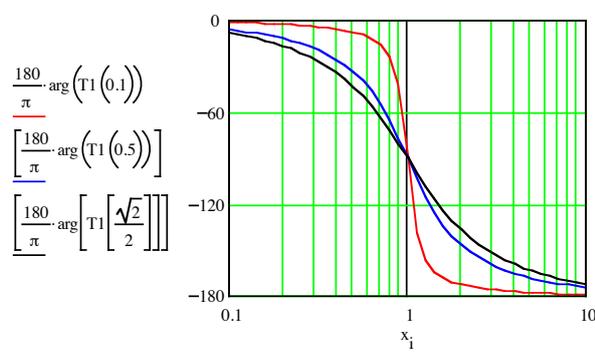


Figure 3

1.2 Expression de la tension aux bornes de la self : filtre passe-haut.

La tension de sortie est prélevée aux bornes de la self inductance L. On détermine alors la fonction de transfert :

$$\underline{T}_2(\omega) = \frac{v_L}{e_g} = \frac{j\omega L}{\underline{Z}} = \frac{j\omega_0 L \omega}{R\omega_0} \frac{1}{\left[1 + jQ_s \left(x - \frac{1}{x}\right)\right]} \quad \underline{T}_2(\omega) = jQ_s x \frac{1}{\left[1 + jQ_s \left(x - \frac{1}{x}\right)\right]}$$

Après développement, on peut mettre l'équation sous la forme :

$$\underline{T}_2(\omega) = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q_s}}$$

Cette équation indique la sortie v_L du circuit RLC série se comporte comme un filtre passe-bas du 2^o ordre. Les filtres actifs de ce type obéissent à la même fonction de transfert. Cette

fonction devient alors en posant à nouveau : $m = \frac{1}{2Q_s}$ $x = \frac{\omega}{\omega_c}$

$$\underline{T}_2(\omega) = \frac{(jx)^2}{1 + 2jmx + (jx)^2} \quad (2)$$

On donne en figure 4 le graphe du module de $T_2(\omega)$ en fonction de x pour trois valeurs du coefficient d'amortissement m : 0.1, 0.5 et 0.707. La figure 5 indique l'évolution correspondante de l'argument

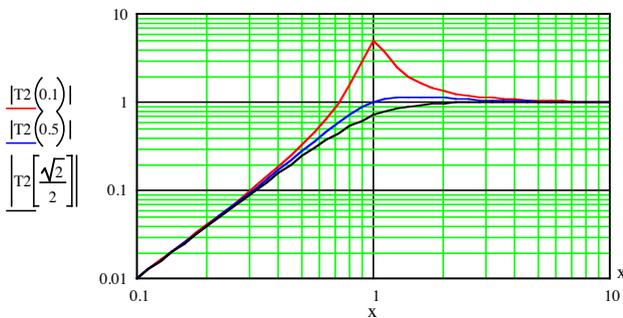


Figure 4

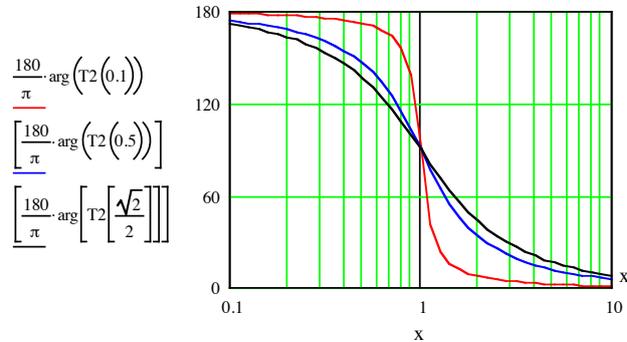


Figure 5

1.3 Expression de la tension v_R aux bornes de la résistance : filtre passe-bande.

La tension de sortie est prélevée maintenant aux bornes de la résistance du circuit RLC série. On détermine alors la fonction de transfert :

$$\underline{T}_3(\omega) = \frac{v_R}{e_g} = \frac{j\omega L}{\underline{Z}} = \frac{R}{R} \frac{1}{\left[1 + jQ_s \left(x - \frac{1}{x}\right)\right]}$$

Après développement, on peut mettre l'équation sous la forme : $\underline{T}_3(\omega) = \frac{x}{1 - x^2 + \frac{x}{jQ_s}}$

Cette équation indique la sortie v_R du circuit RLC série se comporte comme un filtre passe-bande. Les filtres actifs de ce type obéissent à la même fonction de transfert. Cette fonction devient alors en posant à nouveau : $m = \frac{1}{2Q_s}$ $x = \frac{\omega}{\omega_c}$

$$T_3(\omega) = \frac{2jmx}{1 + 2jmx + (jx)^2} \quad (3)$$

On donne en figure 6 le graphe du module de $T_2(\omega)$ en fonction de x pour trois valeurs du coefficient d'amortissement m : 0.1, 0.5 et 0.707. La figure 7 indique l'évolution correspondante de l'argument.

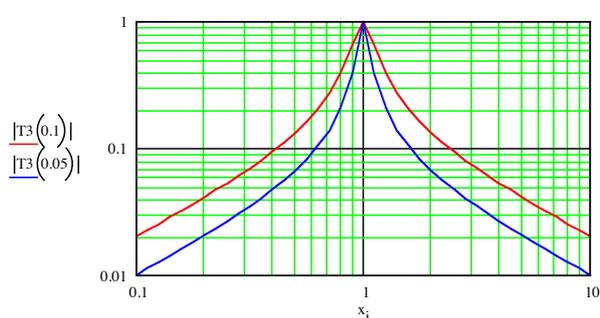


Figure 6

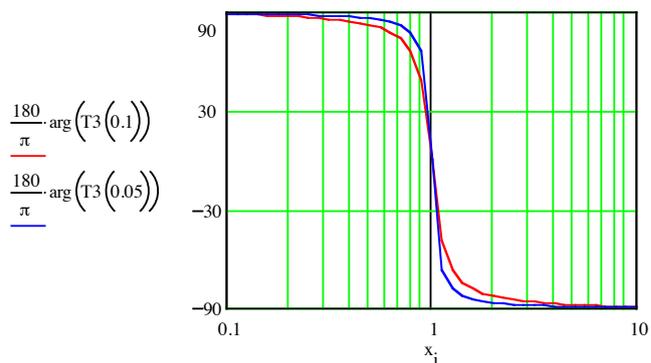


Figure 7

2 FILTRES ACTIFS DE TYPE PASSE-BAS

2.1 CIRCUIT DE RAUCH

Le schéma du filtre passe-bas de Rauch est donné figure 8. On se place dans le cas où toutes les résistances sont égales à R.

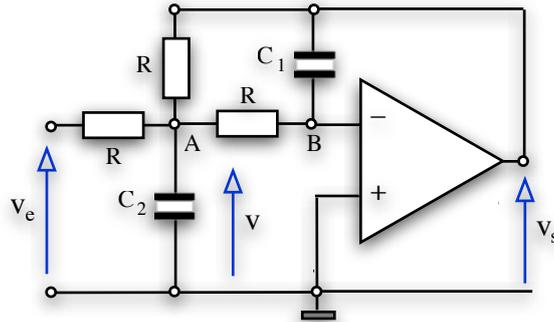


Figure 8

Mise en équation du circuit :

Nœud A : $(v_e - v)G + (v_s - v)G + (0 - v)G - j\omega C_2 v = 0$ soit :

$$-v[3G + j\omega C_2] + v_e G + v_s G = 0 \quad (1)$$

Nœud B : $j\omega C_1 v_s + vG = 0$ soit : $v = -\frac{j\omega C_1}{G} v_s$

On élimine la tension v entre les deux équations précédentes. Ensuite, on procède à une mise en forme de la fonction de transfert (v_s/v_e) de telle manière qu'elle soit conforme à celle d'un filtre passe-bas [équation (1) soit $T_1(\omega)$], il vient alors :

$$T(\omega) = \frac{v_s}{v_e} = -\frac{1}{1 + 3j\omega RC_1 + (j\omega R\sqrt{C_1 C_2})^2}$$

En comparant terme à terme avec l'équation (1), on obtient les relations suivantes :

Gain max en h.f.	Pulsation de coupure à -3dB	Coefficient amortissement
-1	$\omega_c = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$	$m = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$

La connaissance des données du filtre à savoir la pulsation de coupure à -3 dB ω_c et le coefficient d'amortissement m permet, en choisissant la valeur de la résistance R, de déterminer la valeur des condensateurs

condensateurs $C_1 = \frac{2m}{3R\omega_c}$ et $C_2 = \frac{3}{2mR\omega_c}$

2.2 CIRCUIT DE SALLEN ET KEY

Le schéma du filtre passe-bas de Sallen et Key est donné en figure 9. On se place dans le cas où les deux résistances sont égales. Ce filtre fait intervenir un amplificateur opérationnel monté en amplificateur non inverseur (figure 10) de gain $A = 1 + \frac{R_3}{R_4}$ avec une résistance d'entrée infinie et une résistance de sortie nulle.

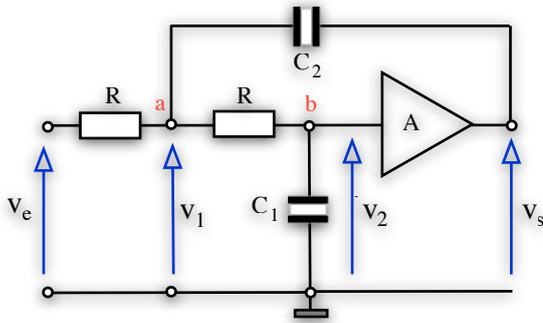


Figure 9

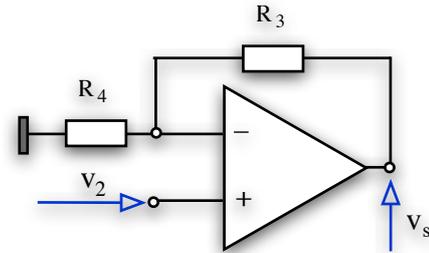


Figure 10

Mise en équations du circuit :

- Nœud a : $(v_e - v_1)G + (v_2 - v_1)G + (v_s - v_1)j\omega C_2 = 0 \rightarrow v_e G - v_1(2G + j\omega C_2) + v_2 G = 0$
- Nœud b : $(v_1 - v_2)G - j\omega C_1 v_2 = 0 \rightarrow v_1 = v_2 \frac{G + j\omega C_1}{G}$
- $v_2 = \frac{v_s}{A}$

On élimine la tension v_1 entre les deux équations. Ensuite, on procède à une mise en forme de la fonction de transfert de telle manière qu'elle soit conforme à celle d'un filtre passe-bas [équation 1 : $T_1(\omega)$], il vient alors :

$$T(\omega) = \frac{A}{1 + j\omega R[2C_1 + C_2(1 - A)] + (j\omega R\sqrt{C_1 C_2})^2}$$

Gain max en h.f.	Pulsation de coupure à -3dB	Coefficient amortissement
A	$\omega_c = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$	$m = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} + \frac{1 - A}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$

Remarque importante : une attention particulière doit être apportée au gain A de l'amplificateur. En effet, en aucun cas le coefficient d'amortissement m ne doit devenir négatif sous peine d'instabilité du montage.

2.3 FILTRE UTILISANT DES QUADRIPÔLES

Le schéma du filtre passe-bas utilisant deux quadripôles respectivement placés à l'entrée et en rétroaction sortie-entrée, est donné en figure 11 (toutes les résistances sont égales à R).

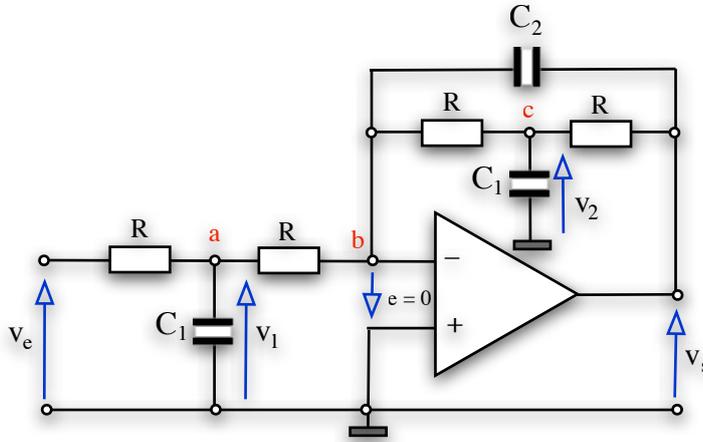


Figure 11

Mise en équations :

$$\text{Nœud b : } Gv_1 + j\omega C_2 v_s + Gv_2 = 0$$

$$\text{Nœud a : } (v_e - v_1)G - j\omega C_1 v_1 - v_1 G = 0 \quad v_1 = \frac{G}{2G + j\omega C_1} v_e$$

$$\text{Nœud c : } -v_2 G - j\omega C_1 v_2 + (v_s - v_2)G = 0 \quad v_2 = \frac{G}{2G + j\omega C_1} v_s$$

En reportant les expressions des tensions v_1 et v_2 dans l'équation au nœud b, on obtient la fonction de transfert du filtre :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{-1}{1 + 2j\omega RC_2 + (j\omega R\sqrt{C_1 C_2})^2}$$

En comparant terme à terme avec la relation (1) soit $T_1(\omega)$ type du filtre passe-bas, on obtient les relations essentielles du filtre :

Gain max en h.f.	Pulsation de coupure à -3dB	Coefficient amortissement
-1	$\omega_c = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$	$m = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$

2.4 FILTRE À VARIABLE D'ETAT

La dénomination « variable d'état » est issue des premiers amplificateurs opérationnels. En effet, ils étaient au départ destinés à résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Nous présentons en figure 12 un filtre passe-bas de ce type.

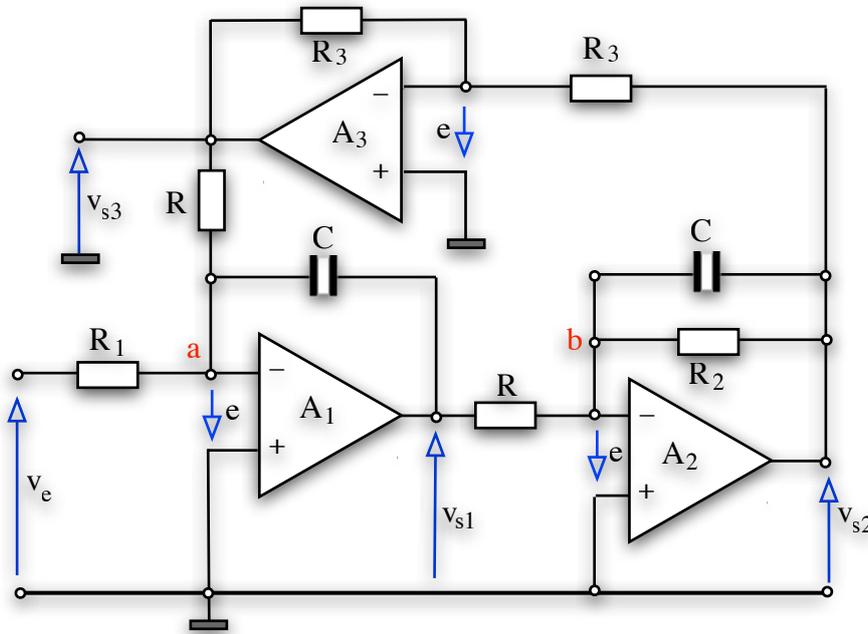


Figure 12

Mise en équations du montage :

- Nœud a : $v_e G_1 + v_{s3} G + j\omega C v_{s1} = 0$
- Nœud b : $v_{s1} G + v_{s2} G_2 + j\omega C v_{s2} = 0$
- L'amplificateur A3 est monté en inverseur : $v_{s3} = -v_{s2}$

En éliminant la tension v_{s1} entre les deux premières expressions, on obtient :

$$T(\omega) = \frac{v_{s2}}{v_e} = \frac{\frac{G_1}{G}}{1 + j\omega C G_2 + \left(\frac{j\omega C}{G}\right)^2}$$

Cette relation est conforme à celle d'un filtre passe-bas [équation 1 : $T_1(\omega)$], il vient alors :

Gain max en b.f.	Pulsation de coupure à -3dB	Coefficient amortissement
$A = \frac{R}{R_1}$	$\omega_c = \frac{1}{RC}$	$m = \frac{R}{2R_2}$

Le coefficient d'amortissement m est ajustable par l'intermédiaire de la résistance R_2 .

3 FILTRES ACTIFS DE TYPE PASSE-HAUT

3.1 Structure de RAUCH

Le schéma du filtre passe-haut de Rauch est donné en figure 13. On se place dans le cas où toutes les capacités seraient égales à C.

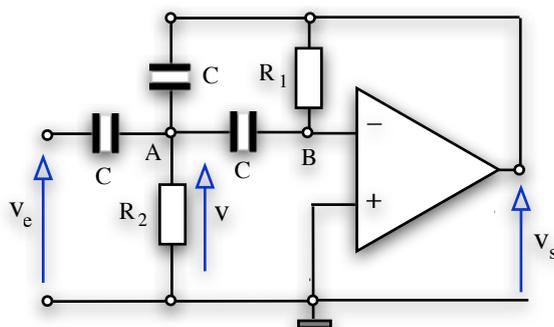


Figure 13

Mise en équation du circuit :

- Nœud A : $(v_e - v)j\omega C + (v_s - v)j\omega C + (0 - v)j\omega C - G_2 v = 0$
soit : $-v[3j\omega C + G_2] + j\omega C v_e + j\omega C v_s = 0$
- Nœud B : $v_s G_1 + j\omega C v = 0$ soit : $v = -\frac{G_1}{j\omega C} v_s$

On élimine la tension v entre les deux équations. Ensuite, on procède à une mise en forme de la fonction de transfert de telle manière qu'elle soit conforme à celle d'un filtre passe-haut [équation (2), $T_2(\omega)$], il vient alors :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{v_s}{v_e} = -\frac{(j\omega C \sqrt{R_1 R_2})^2}{1 + j\omega(3R_2 C) + (j\omega C \sqrt{R_1 R_2})^2}$$

En comparant terme à terme avec la relation type du filtre passe-haut, on obtient les relations suivantes :

Gain max aux b.f.	Pulsation de coupure à -3dB	Coefficient amortissement
-1	$\omega_c = \frac{1}{C\sqrt{R_1 R_2}}$	$m = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$

La connaissance des données du filtre à savoir la pulsation de coupure à -3 dB ω_c et le coefficient d'amortissement m permet, en choisissant la valeur de la résistance R, de déterminer la valeur des condensateurs :

$$C_1 = \frac{3}{2mC\omega_c} \quad C_2 = \frac{3}{2mR\omega_c}$$

3.2 CIRCUIT DE SALLEN ET KEY

Le schéma du filtre passe-haut de Sallen et Key est donné en figure 14. On se place dans le cas où les deux résistances sont égales à R . Ce filtre fait intervenir un amplificateur opérationnel monté en amplificateur non inverseur de gain $A = 1 + \frac{R_3}{R_4}$ de résistance d'entrée infinie et de résistance de sortie nulle (figure 10).

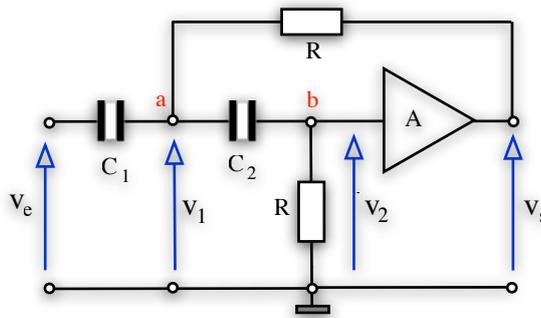


Figure 14

Mise en équations du circuit :

- Nœud a : $(v_e - v_1)j\omega C_1 + (v_2 - v_1)j\omega C_2 + (v_s - v_1)G = 0$
Soit : $j\omega C_1 v_e - v_1(j\omega C_1 + j\omega C_2 + G) + j\omega C_2 v_2 = 0$
- Nœud b : $(v_1 - v_2)j\omega C_2 - v_2 G = 0 \quad \rightarrow \quad v_1 = v_2 \frac{G + j\omega C_2}{j\omega C_2}$
- $v_2 = \frac{v_s}{A}$

On élimine la tension v_1 . Ensuite, on procède à une mise en forme de la fonction de transfert de telle manière qu'elle soit conforme à celle d'un filtre passe-haut $[T_2(\omega)]$, il vient alors :

$$\underline{T}(\omega) = A \frac{(j\omega)^2 C^2 R_1 R_2}{(1 + j\omega R C_1)(1 + j\omega R C_2) + j\omega R C_2 (1 - A)}$$

Gain max en h.f.	Pulsation de coupure à -3dB	Coefficient amortissement
A	$\omega_c = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$	$m = \frac{R(C_1 + C_2) + R C_2 (1 - A)}{2R\sqrt{C_1 C_2}}$

Remarque importante : une attention particulière doit être apportée au gain A de l'amplificateur. En effet, en aucun cas le coefficient d'amortissement m ne doit devenir négatif sous peine d'instabilité du montage.

3.3 FILTRE UTILISANT DES QUADRIPÔLES

Le schéma du filtre passe-haut utilisant deux quadripôles respectivement placés à l'entrée et en rétroaction est donné figure 15. On se place dans le cas où toutes les capacités seraient égales à C.

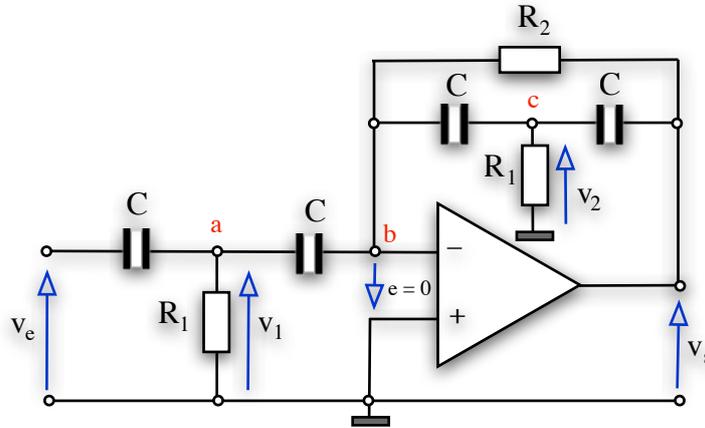


Figure 15

On remarquera par comparaison avec le filtre passe-bas, l'échange de l'emplacement sur le circuit des résistances et des capacités.

Mise en équations :

$$\text{Nœud b : } j\omega C v_1 + G_2 v_s + j\omega C v_2 = 0$$

$$\text{Nœud a : } j\omega C (v_e - v_1) - G_1 v_1 - j\omega C v_1 = 0 \quad v_1 = \frac{j\omega C}{G_1 + 2j\omega C} v_e$$

$$\text{Nœud c : } -v_2 G_1 - j\omega C v_2 + (v_s - v_2) j\omega C = 0 \quad v_2 = \frac{j\omega C}{G_1 + 2j\omega C} v_s$$

En reportant les expressions des tensions v_1 et v_2 dans l'équation au nœud b, on obtient la fonction de transfert du filtre :

$$\underline{T(\omega)} = \frac{v_s}{v_e} = \frac{-1}{1 + 2j\omega C R_2 + (j\omega C \sqrt{R_1 R_2})^2}$$

En comparant terme à terme avec la relation type du filtre passe-haut (équation 2 : $T_2(\omega)$), on obtient les relations suivantes :

Gain max en h.f.	Pulsation de coupure à -3dB	Coefficient amortissement
-1	$\omega_c = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$	$m = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$

3.4 FILTRE UTILISANT UN MONTAGE GYRATEUR

Le montage gyrateur (figure 16) est un quadripôle actif caractérisé par sa résistance de gyration R_g . Les relations entrée-sortie du montage gyrateur sont telles que :

- $v_1 = R_g i_2$
- $v_2 = -R_g i_1$

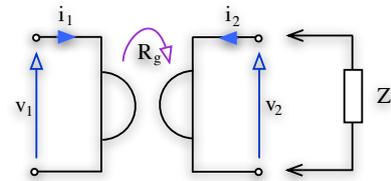


Figure 16

Le gyrateur est un inverseur d'impédance.

Plaçons en effet en sortie une charge Z . On obtient alors : $v_2 = -Zi_2$.

Calculons l'impédance d'entrée du montage. Sachant que : $R_g i_1 = Z \frac{v_1}{R_g}$ on obtient :

$$Z_e = \frac{v_1}{i_1} = \frac{R_g^2}{Z}$$

L'impédance d'entrée Z_e est bien l'inverse de l'impédance de charge Z . Ainsi une capacité $Z = \frac{1}{j\omega C}$

est vue comme une self de valeur $L = R_g^2 C$. C'est une méthode de synthèse de self inductance de fortes valeurs.

De même l'impédance d'entrée d'un gyrateur dont la sortie est laissée "en l'air" est nulle, elle est au contraire infinie si la sortie est en court-circuit. L'association de plusieurs gyrateurs permet de synthétiser diverses impédances.

La figure 17 montre un exemple de circuit gyrateur (parmi tant d'autres).

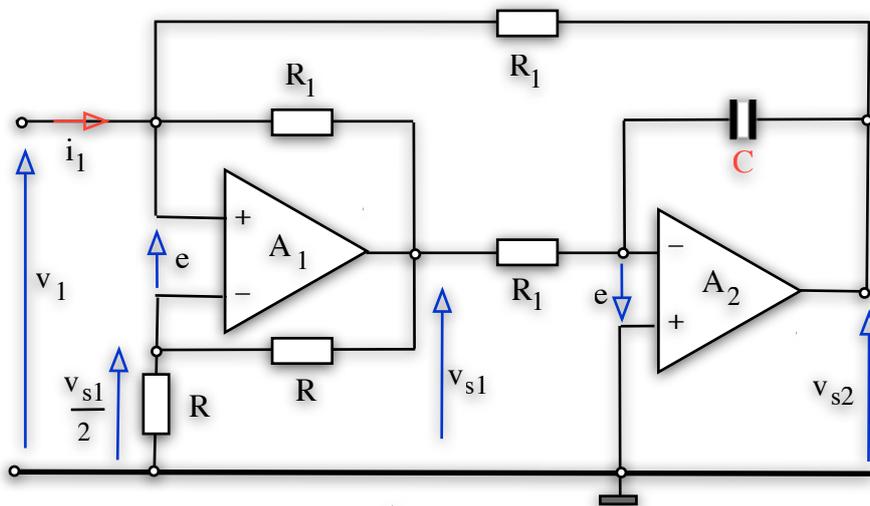


Figure 17

Le montage qui utilise l'amplificateur opérationnel A_1 est tel que : $v_{s1} = 2v_1$.

$$D'autre part : v_{s2} = -\frac{v_{s1}}{j\omega R_1 C}$$

$$\text{Exprimons le courant } i_1 : i_1 = \frac{v_1 - v_{s1}}{R_1} + \frac{v_1 - v_{s2}}{R_1}$$

Avec les relations précédentes, on exprime l'impédance d'entrée du montage : $Z_e = \frac{v_1}{i_1} = j\omega \left[\frac{R_1^2 C}{2} \right]$.

Il s'agit donc d'une self inductance simulée : $L_{sim} = \frac{R_1^2 C}{2}$

Cette self inductance simulée est associée au circuit suivant (figure 18) de manière à réaliser un filtre passe-haut du second ordre (L'A.O.P. A_3 monté en suiveur de tension met en jeu son importante résistance d'entrée).

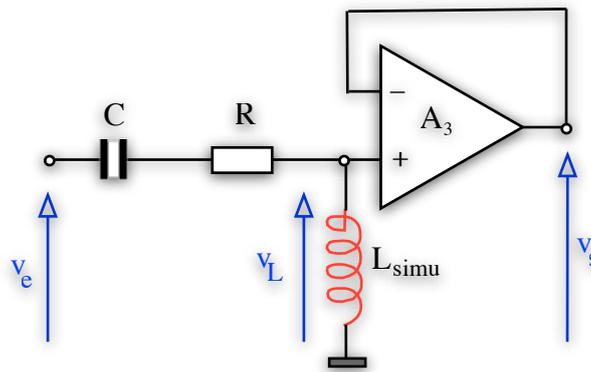


Figure 18

Déterminons la fonction de transfert du filtre.

$$\underline{T}(\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{v_L}{v_e} = \frac{j\omega L_{sim}}{R + j\omega L_{sim} + \frac{1}{j\omega C}} \rightarrow \underline{T}(\omega) = \frac{(j\omega)^2 CL_{sim}}{1 + j\omega CR + (j\omega)^2 CL_{sim}}$$

$$\underline{T}(\omega) = \frac{\left(\frac{j\omega R_1 C}{\sqrt{2}} \right)^2}{1 + j\omega CR + \left(\frac{j\omega R_1 C}{\sqrt{2}} \right)^2}$$

En comparant terme à terme avec la relation type du filtre passe-haut $T_2(\omega)$, on obtient les relations suivantes :

Gain max aux b.f.	Pulsation de coupure à -3dB	Coefficient amortissement
1	$\omega_c = \frac{\sqrt{2}}{CR_1}$	$m = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{R}{R_1}$

3.5 FILTRE À VARIABLE D'ETAT

La dénomination « variable d'état » est issue de l'origine de la dénomination des amplificateurs opérationnels. En effet, ils étaient au départ destinés à résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Nous présentons en figure 19 un filtre passe-haut de ce type.

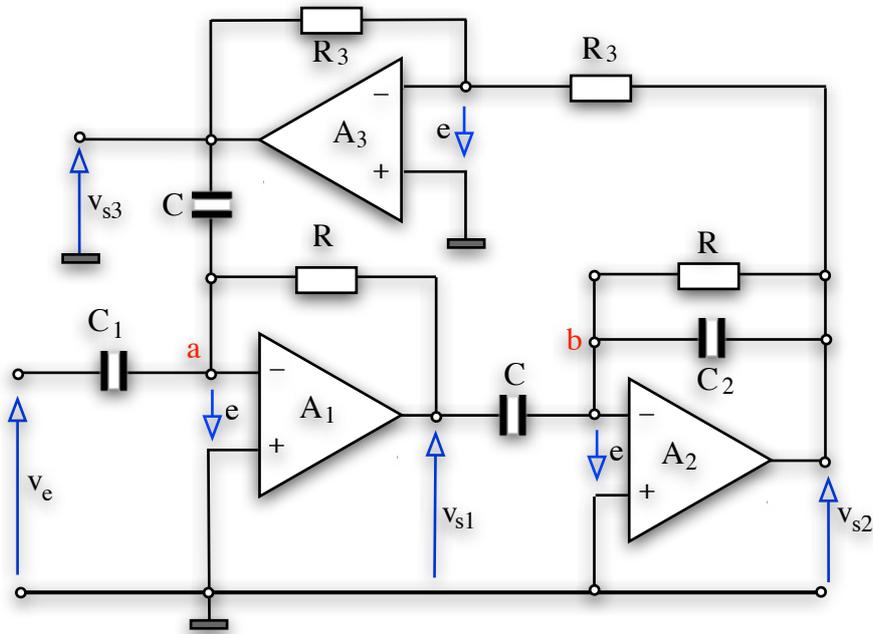


Figure 19

Mise en équations du montage :

- Nœud a : $v_e j\omega C_1 + v_{s3} j\omega C + Gv_{s1} = 0$
- Nœud b : $v_{s1} j\omega C + v_{s2} j\omega C_2 + Gv_{s2} = 0$
- L'amplificateur A_3 est monté en inverseur : $v_{s3} = -v_{s2}$

En éliminant la tension v_{s1} entre les deux premières expressions, on obtient :

$$\underline{T(\omega)} = \frac{v_{s2}}{v_e} = \frac{C_1}{C} \frac{(j\omega RC)^2}{1 + j\omega RC_2 + (j\omega RC)^2}$$

Cette relation est conforme à celle d'un filtre passe-haut [équation 2 : $T_2(\omega)$], il vient alors :

Gain max en b.f.	Pulsation de coupure à -3dB	Coefficient amortissement
$A = \frac{C_1}{C_2}$	$\omega_c = \frac{1}{RC}$	$m = \frac{C_2}{2C}$

Remarque : en fait on peut se reporter au montage filtre passe-bas au paragraphe 2.4. En effet on passe d'un type à l'autre en effectuant les permutations de composants : $G \leftrightarrow j\omega C$, $G_1 \rightarrow j\omega C_1$ et $G_2 \rightarrow j\omega C_2$.

4 FILTRES DE TYPE PASSE-BANDE

4.1 STRUCTURE DE RAUCH

Le schéma du filtre passe-bande de Rauch est donné en figure 20. On se place dans le cas où toutes les capacités seraient égales à C.

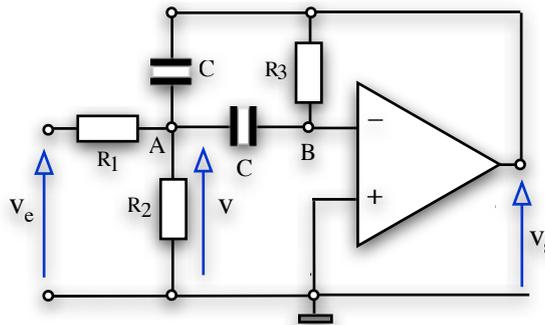


Figure 20

Mise en équation du circuit :

Nœud A : $(v_e - v)G_1 + (v_s - v)j\omega C + (0 - v)j\omega C - G_2 v = 0$ soit :

$$-v[2j\omega C + G_1 + G_2] + G_1 v_e + j\omega C v_s = 0$$

Nœud B : $v_s G_3 + j\omega C v = 0$ soit : $v = -\frac{G_3}{j\omega C} v_s$

On élimine la tension v entre les deux équations. Ensuite, on procède à une mise en forme de la fonction de transfert de telle manière qu'elle soit conforme à celle d'un filtre passe-bande ($T_3(\omega)$), il vient alors :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{v_s}{v_e} = -\left(\frac{R_3}{2R_1}\right) \frac{2j\omega(R_1 // R_2)C}{1 + 2j\omega(R_1 // R_2)C + (j\omega C)^2 R_3(R_1 // R_2)}$$

En comparant terme à terme avec la relation type du filtre passe bande ($T_3(\omega)$), on obtient les relations suivantes :

Gain maximal	Pulsation de coupure à -3dB	Coefficient amortissement
$A_{\max} = \left[\frac{v_s}{v_e} \right]_{\max} = -\frac{R_3}{2R_1}$	$\omega_c = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1}{R_3(R_1 // R_2)}}$	$m = \sqrt{\frac{(R_1 // R_2)}{R_3}}$

La connaissance des données du filtre à savoir la pulsation de coupure à -3 dB ω_c , le coefficient d'amortissement m et la bande passante $\Delta\omega = 2m\omega_c$ permet, en choisissant la valeur de la capacité C, de déterminer la valeur des résistances :

- $R_3 = \frac{2}{C\Delta\omega}$
- $R_1 = -\frac{R_3}{2A_{\max}} = -\frac{1}{A_{\max}C\Delta\omega}$
- $R_2 = \frac{1}{C} \frac{\Delta\omega}{2\omega_c^2 + A_{\max}\Delta\omega^2}$

Les relations précédentes montrent une **possibilité d'ajustage du filtre**, en effet dans l'ordre :

- La bande passante $\Delta\omega$ dépend de la résistance R_3
- L'accord du filtre s'il est suffisamment sélectif est une fonction de la résistance R_2 :

$$R_2 \approx \frac{\Delta\omega}{C2\omega_c^2}$$

- L'amplification dépend de la résistance R_1 .

4.2 CIRCUIT DE SALLEN ET KEY

Le schéma du filtre passe-bande de Sallen et Key est donné en figure 21. On se place dans le cas où les deux capacités sont égales. Ce filtre fait intervenir un amplificateur opérationnel monté en amplificateur non inverseur de gain $A = 1 + \frac{R_3}{R_4}$ ayant une résistance d'entrée infinie et une résistance de sortie nulle.

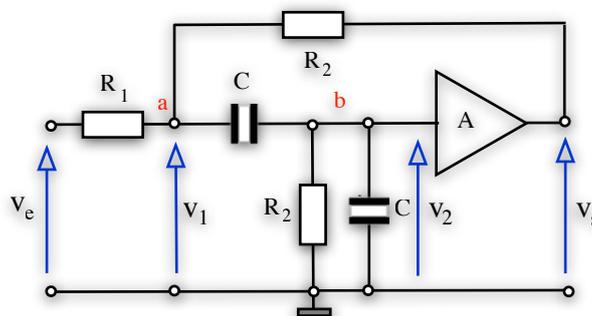


Figure 21

Mise en équations du circuit :

- Nœud a : $(v_e - v_1)G_1 + (v_2 - v_1)j\omega C + (v_s - v_1)G_2 = 0$
 $G_1 v_e - v_1(j\omega C + C_2 + G_1) + j\omega C v_2 + G_2 v_s = 0$
- Nœud b : $(v_1 - v_2)j\omega C - v_2 G_2 - v_2 j\omega C = 0 \quad \rightarrow \quad v_1 = v_2 \frac{G_2 + 2j\omega C}{j\omega C}$
- $v_2 = \frac{v_s}{A}$

On élimine la tension v_1 . Ensuite, on procède à une mise en forme de la fonction de transfert de telle manière qu'elle soit conforme à celle d'un filtre passe-bande $[T_3(\omega)]$, il vient alors :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{AR_2}{2R_2 + R_1(3-A)} \frac{j\omega R_2 C \left[2 + (1-A) \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right]}{1 + j\omega R_2 C \left[2 + (1-A) \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right] + (j\omega R_2 C)^2 \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

En comparant terme à terme avec la relation type du filtre passe-bande (équation 3 : $T_3(\omega)$), on obtient les relations suivantes :

Gain maximal	Pulsation de coupure à -3dB	Coefficient d'amortissement
$A_{\max} = \left[\frac{v_s}{v_e} \right]_{\max} = \frac{AR_2}{2R_2 + R_1(3-A)}$	$\omega_c = \frac{1}{R_2 C} \sqrt{1 + \frac{R_2}{R_1}}$	$m = \frac{2R_2 + R_1(3-A)}{2\sqrt{R_1(R_1 + R_2)}}$

La bande passante du filtre est telle que : $\Delta\omega = 2m\omega_c = \frac{1}{R_2 C} \left[2\frac{R_2}{R_1} + 3 - A \right]$.

Elle est donc ajustable par l'intermédiaire du gain A. Il faut cependant veiller à ce que : $A < 2\frac{R_2}{R_1} + 3$. En effet, en aucun cas le coefficient d'amortissement m ne doit devenir négatif sous peine d'instabilité du montage.

4.3 FILTRE UTILISANT DES QUADRIPÔLES

Le schéma du filtre passe-bande utilisant deux quadripôles respectivement placés à l'entrée et en rétroaction est donné en figure 22. On se place dans le cas où toutes les résistances seraient égales.

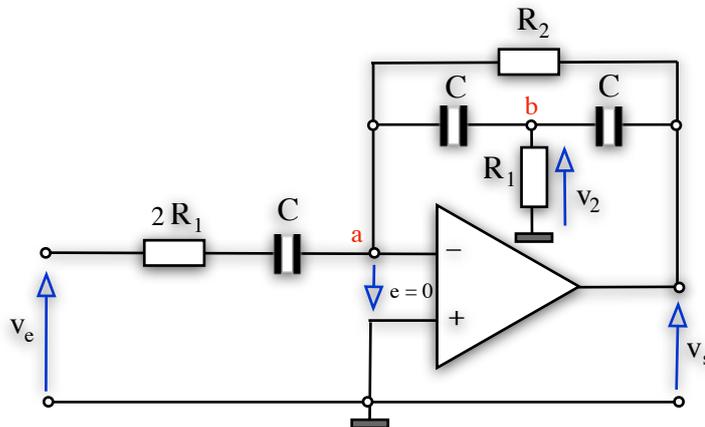


Figure 22

Mise en équation du circuit :

$$\text{Nœud a : } \frac{j\omega C}{1 + 2j\omega C R_1} v_e + G_2 v_s + j\omega C v_2 = 0$$

$$\text{Nœud b : } -v_2 G_1 - j\omega C v_2 + (v_s - v_2) j\omega C = 0 \quad v_2 = \frac{j\omega C}{G_1 + 2j\omega C} v_s$$

On élimine la tension v_2 et ensuite, on procède à une mise en forme de la fonction de transfert de telle manière qu'elle soit conforme à celle d'un filtre passe-bande, il vient alors :

$$T(\omega) = -\frac{j\omega R_2 C}{1 + 2j\omega R_1 C + (j\omega C \sqrt{R_1 R_2})^2}$$

En comparant terme à terme avec la relation type du filtre passe-bande (équation 3 : $T_3(\omega)$), on obtient les relations suivantes :

Gain max	Pulsation de coupure à -3dB	Coefficient amortissement
$A = -\frac{R_2}{2R_1}$	$\omega_c = \frac{1}{C\sqrt{R_1 R_2}}$	$m = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$

4.4 FILTRE À VARIABLE D'ETAT

La dénomination « variable d'état » est issue de l'origine de la dénomination des amplificateurs opérationnels. En effet, ils étaient au départ destinés à résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Nous présentons en figure 23 un filtre passe-bande de ce type.

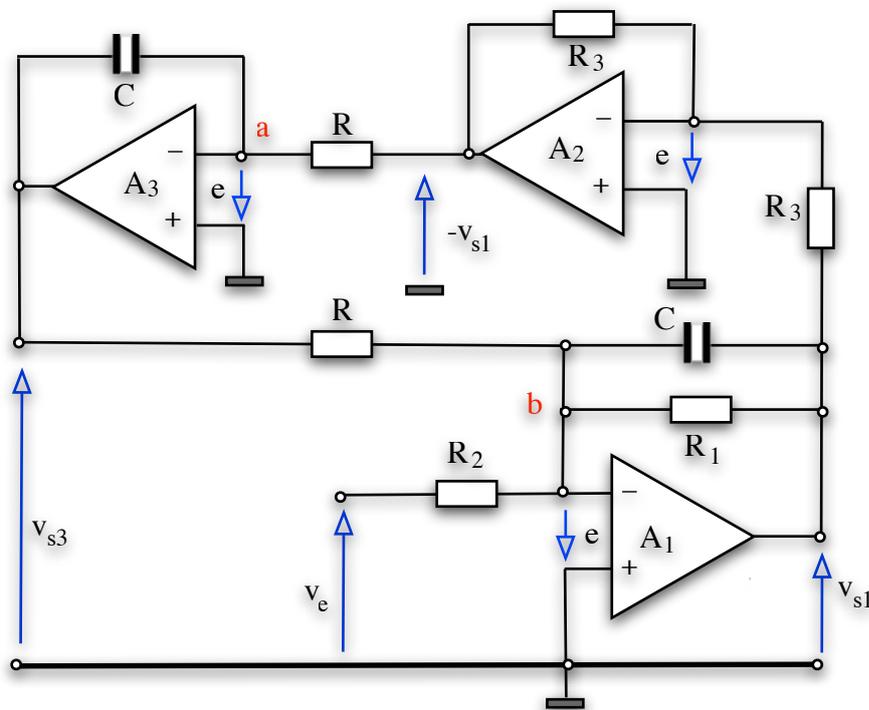


Figure 23

Mise en équation du montage :

- Nœud a : $-v_{s1}G + j\omega C v_{s3} = 0$
- Nœud b : $v_e G_2 + v_{s3}G + j\omega C v_{s1} + v_{s1}G_1 = 0$

En éliminant la tension v_{s3} entre les deux équations, il vient :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{v_{s1}}{v_e} = -\frac{R_1}{R_2} \frac{j\omega \frac{R^2 C}{R_1}}{1 + j\omega \frac{R^2 C}{R_1} + (j\omega RC)^2}$$

En comparant terme à terme avec la relation type du filtre passe-bande (équation 3 : $T_3(\omega)$), on obtient les relations suivantes :

Gain maximal	Pulsation de coupure à -3dB	Coefficient d'amortissement
$A_{\max} = \left[\frac{v_{s1}}{v_e} \right]_{\max} = -\frac{R_2}{R_1}$	$\omega_c = \frac{1}{RC}$	$m = \frac{R}{2R_1}$

La bande passante du montage est telle que : $\Delta\omega = 2m\omega_c = \frac{1}{R_1 C}$

4.5 FILTRE UTILISANT UN MONTAGE GYRATEUR

Le montage gyrateur est présenté au paragraphe 3.4. Il est utilisé ici pour réaliser un filtre passe-bande (figure 24). On appelle G_g sa conductance de gyration.

On rappelle les relations du montage gyrateur :

- $i_1 = -G_g v_2$
- $i_2 = G_g v_1$

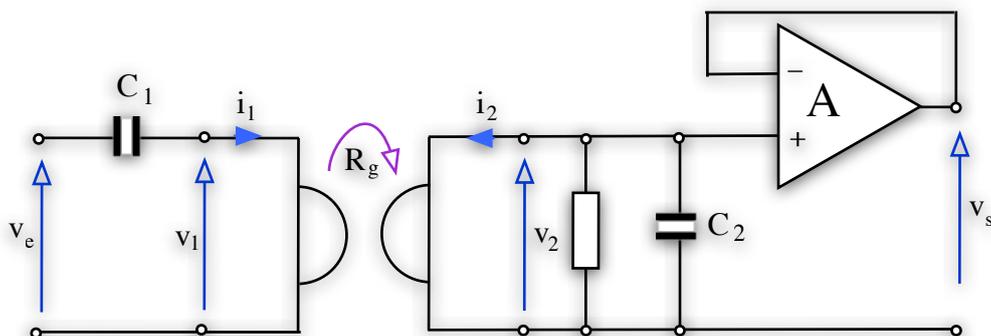


Figure 24

Mise en équations du montage :

- $i_1 = j\omega C_1 (v_e - v_1) = -v_2 G_g$
- $i_2 = -v_2 (G + j\omega C_2) = -G_g v_1$

On élimine la tension v_1 : $v_1 = -v_2 \frac{G + j\omega C_2}{G_g}$

L'A.O.P. est monté en suiveur de tension : $v_s = v_2$ et la résistance d'entrée est très élevée.
La fonction de transfert du filtre est telle que :

$$\frac{T(\omega)}{v_e} = \frac{v_s}{v_e} = - \frac{j\omega C_1}{G_g + j\omega C_1} \frac{G + j\omega C_2}{G_g}$$

On procède à la mise en forme de cette expression de telle manière qu'elle soit conforme à celle d'un filtre passe-bande (équation 3, $T_3(\omega)$). Il vient alors :

$$\frac{T(\omega)}{v_e} = \frac{v_s}{v_e} = - \frac{G_g}{G} \frac{\frac{j\omega C_1 G}{G_g^2}}{1 + \frac{j\omega C_1 G}{G_g^2} + \left(\frac{j\omega}{G_g} \sqrt{C_1 C_2} \right)^2}$$

En comparant terme à terme avec la relation type du filtre passe-bande (équation 3 : $T_3(\omega)$), on obtient les relations suivantes :

Gain maximal	Pulsation de coupure à -3dB	Coefficient d'amortissement
$A_{\max} = -\frac{R}{R_g}$	$\omega_c = \frac{1}{R_g \sqrt{C_1 C_2}}$	$m = \frac{R_g}{2R} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$

La bande passante du montage est telle que : $\Delta\omega = 2m\omega_c = \frac{1}{RC_2}$

Les relations précédentes montrent une **possibilité d'ajustage du filtre**, en effet dans l'ordre :

- Le gain maximum est fixé par les résistances R et R_g .
- La bande passante peut alors être fixée par la capacité C_2 .
- L'accord du filtre est ensuite fixé par la capacité C_1 .

ANNEXE : FILTRE REJECTEUR DE FREQUENCES

L'introduction basée sur le circuit RLC série ne permettait pas de présenter ce type de filtre dont la fonction de transfert est :

$$T_{-4}(\omega) = A \frac{1 + (jx)^2}{1 + 2jmx + (jx)^2} \text{ avec : } x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

La figure 25 indique la courbe de réponse de ce filtre en fonction de la fréquence réduite x , pour diverses valeurs du coefficient d'amortissement m

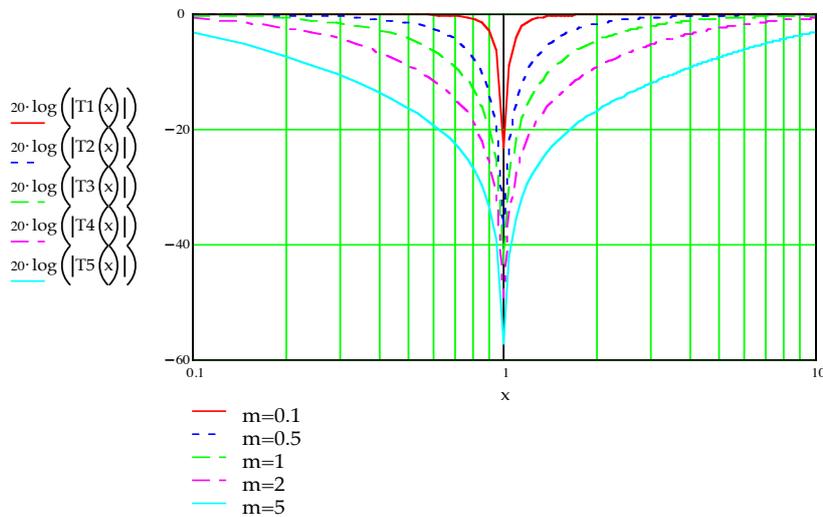


Figure 25

On présente en figure 26 le schéma d'un montage de ce type qui utilise deux quadripôles en « T ponté » montés en rétroaction.

Sachant que l'entrée négative de l'amplificateur opérationnel est une masse virtuelle ($e = 0V$), nous allons exprimer les quatre courants indiqués sur la figure 26.

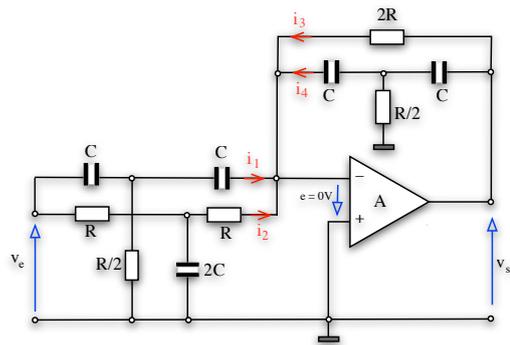


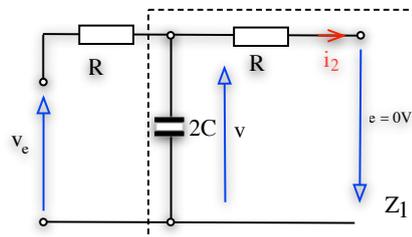
Figure 26

Exemple : calcul du courant i_2 (figure ci-contre).

$$Z_1 = \frac{R}{1 + 2j\omega RC} \rightarrow v = \frac{Z_1}{R + Z_1} v_e \rightarrow i_2 = \frac{v}{R}$$

On en déduit :

$$i_2 = \frac{1}{2R(1 + j\omega RC)} v_e$$



On détermine ensuite :

- $i_1 = \frac{(j\omega RC)^2}{2R(1 + j\omega RC)} v_e$
- $i_3 = \frac{1}{2R} v_s$
- $i_4 = \frac{(j\omega RC)^2}{2R(1 + j\omega RC)} v_s$

Sachant que : $i_1 + i_2 = -(i_3 + i_4)$ la fonction de transfert du filtre est telle que :

$$\underline{T}(\omega) = -\frac{1 + (j\omega RC)^2}{1 + j\omega RC + (j\omega RC)^2}$$

Cette expression est comparée avec $T_4(\omega)$. On en déduit :

Gain	Pulsation de coupure à -3dB	Coefficient amortissement
$A = -1$	$\omega_c = \frac{1}{RC}$	$m = 0,5$

ANNEXE : APPLETS DE J.J. ROUSSEAU

Filtres de Rauch :

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electro/rauch.html>

Filtres Sallen et Key :

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electro/sallen.html>

Filtre universel :

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electro/universel.html>